令和４年度第２次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　選　抜

数理物質科学専攻
数理科学
A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページあります。
3. 試験時間は，９：００～１１：００ です。
4. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

　問題冊子１部，解答用紙３枚

5. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 下書きは，問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

新潟大学大学院自然科学研究科

$\boxed{\text{問題}\quad 1}$

$\sin x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\sin^{-1} x$ と表す。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ の導関数を求めよ。

(2) $a > 0$ とする。関数 $g(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \dfrac{x}{a}$ の導関数を求めよ。

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$ を求めよ。

(4) 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{-2x - x^2}\, dx$ を求めよ。

問題　2

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) A の固有ベクトルで 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底となるものを一組求めよ。

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P と $P^{-1}AP$ を一組求めよ。

問題　3

$(X, \|\cdot\|)$ を実ノルム空間とし，X の零ベクトル $\mathbf{0}$ の開単位球を

$$U = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \|\boldsymbol{x}\| < 1\}$$

とする。$\boldsymbol{a} \in X$ と $A \subset X$ に対して，$\boldsymbol{a} + rU \subset A$ となる正の実数 r が存在するとき，$\boldsymbol{a}$ を A の内点といい，A の内点全体の集合を A の内部といって，$\operatorname{int} A$ で表す。また，$\operatorname{int} A = A$ となるとき，A を X の開集合といい，開集合の補集合を閉集合という。なお，$\boldsymbol{x} \in X$，$A, B \subset X$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\boldsymbol{x} + \alpha B := \{\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in B\}, \quad \text{特に} \quad \boldsymbol{x} - B := \boldsymbol{x} + (-1)B$$
$$A + B := \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{b} \in B\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{x} \in X$ と $A, B \subset X$ に対して，$\boldsymbol{x} \in A + B$ であることと $A \cap (\boldsymbol{x} - B) \neq \emptyset$ であることが同値であることを示せ。

(2) 正の実数 r に対して，$A \cap (\boldsymbol{x} - B + rU) = \emptyset$ ならば $(A + B) \cap (\boldsymbol{x} + rU) = \emptyset$ となることを示せ。

(3) $F \subset X$ に対して，F が閉集合であって，$\boldsymbol{x} \notin F$ ならば

$$(\boldsymbol{x} + \delta U + \delta U) \cap (F + \delta U) = \emptyset$$

となる正の実数 δ が存在することを示せ。

(4) $K, F \subset X$ に対して，K がコンパクト集合で F が閉集合で $K \cap F = \emptyset$ ならば

$$(K + \varepsilon U) \cap (F + \varepsilon U) = \emptyset$$

となる正の実数 ε が存在することを (3) を利用して証明せよ。

(5) X の 2 つの部分集合として，コンパクト集合 A と閉集合 B を考えるとき，$A + B$ が閉集合となることを (1)，(2)，(4) を利用して証明せよ。

問題　4

群 G の空でない部分集合 S に対して，

$$N_G(S) = \{x \in G \mid x^{-1}Sx = S\},$$
$$Z_G(S) = \{x \in G \mid xs = sx \ (s \in S)\}$$

と定義する。次の問いに答えよ。

(1) $N_G(S)$ は G の部分群であることを示せ。

(2) $Z_G(S)$ は G の部分群であることを示せ。

(3) G の部分群 H に対して，$N_G(H)$ は H を正規部分群として含む G の部分群のうち最大のものであることを示せ。

(4) 位数 $2n$ $(n \geqq 3)$ の二面体群 D_n に対して，$Z_{D_n}(D_n)$ を求めよ。

問題　5

$a, b, c > 0$とする。3次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^3$内の曲線$\mathbf{p}(t) = \left(a\cos\frac{t}{c}, a\sin\frac{t}{c}, b\frac{t}{c}\right)$ $(-\infty < t < \infty)$ をCで表す。次の問いに答えよ。

(1)　曲線Cの接ベクトルを求めよ。

(2)　曲線Cが弧長パラメータ表示されることの必要十分条件を求めよ。

(3)　曲線Cが弧長パラメータ表示されているとき，Cの曲率を求めよ。

(4)　曲線Cが弧長パラメータ表示されているとき，Cの捩率（れいりつ）を求めよ。

問題　6

次の線形計画問題について考える。

$$
(\mathrm{LP})\left\{\begin{array}{llllll}
\text{最小化} & 3x_1 & +2x_2 & & \\
\text{制約条件} & 3x_1 & +x_2 & \geqq & 12 \\
 & 2x_1 & +x_2 & \geqq & 10 \\
 & x_1 & +x_2 & \geqq & 6 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0}
\end{array}\right.
$$

次の問いに答えよ。

(1)　実行可能領域のすべての頂点を求めよ。

(2)　座標平面 (x_1, x_2) 上に問題 (LP) の実行可能領域と目的関数の等高線を図示し，問題 (LP) の最適解と最適値を求めよ。

(3)　問題 (LP) の双対問題 (D) を記述せよ。

(4)　(3) で求めた双対問題 (D) をシンプレックス法で解き，双対問題 (D) の最適解と最適値を求めよ。ただし，シンプレックス法の計算過程も記述すること。